Թեմա 1

Ֆակտոր-տոպոլոգիա, ֆակտոր-տարածություն, օրինակներ: Տոպոլոգիական տարածություններում «սոսնձման» (նույնացման) գործողությունը, օրինակներ: Ֆակտոր-տարածությունների ֆակտոր-արտապատկերումներ:

Նախորդ թեմայում (X, τ) տոպոլոգիական տարածության $A \subset X$ ենթաբազմության վրա սահմանվեց (մակածված) տոպոլոգիա՝ որպես A բազմության ամենաթույլ տոպոլոգիա, որի դեպքում $i : A \to X$ ներդրումը անընդհատ է:

Այժմ դիտարկենք այդ նույն խնդիրը ավելի ընդհանրացված տեսքով: Դիցուք ունենք (X, τ) տոպոլոգիական տարածություն, A բազմություն (որը կարող է և չլինել X-ի ենթաբազմություն) և $f : A \to X$ արտապատկերում: Ինչպե՞ս սահմանել տոպոլոգիա A բազմության վրա, որպեսզի f արտապատկերումը լինի անընդհատ: Կարելի է, օրինակ, A-ն օժտել ամենաուժեղ՝ դիսկրետ տոպոլոգիայով, և իհարկե f-ը կլինի անընդհատ: Կարևոր խնդիր է՝ գտնել A-ի այն ամենաթույլ տոպոլոգիան, որի դեպքում f-ը կլինի անընդհատ: Հասկանալի է, որ այդ տոպոլոգիան իր մեջ պարունակելու է բոլոր $f^{-1}(V)$ ենթաբազմությունները, որտեղ $V \in \tau$: Հեշտ է տեսնել, որ այդ պայմանը, լինելով անհրաժեշտ, նաև բավարար պայման է, քանի որ A բազմության ենթաբազմությունների $\{f^{-1}(V) \mid V \in \tau\}$ ընտանիքը, շնորհիվ

$$f^{-1}\left(\bigcup_i V_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(V_i), \qquad f^{-1}\left(\bigcap_i V_i\right) = \bigcap_i f^{-1}(V)$$

նույնացումների, բավարարում է տոպոլոգիայի 1-3 աքսիոմներին: Այդ տոպոլոգիան կոչվում է τ տոպոլոգիայի նախակերպար կամ ինիցիալ տոպոլոգիա A ենթաբազմության վրա՝ որոշված f արտապատկերումով:

Մասնավոր դեպքում, երբ $A \subset X$, իսկ f-ը $A \to X$ ներդրումն է, այս տոպոլոգիան համընկնում է A ենթաբազմության վրա մակածված τ_A տոպոլոգիայի հետ:

Հիմա քննարկենք մեկ այլ, այս խնդրին նման խնդիր: Դիցուք ունենք (X, τ) տոպոլոգիական տարածություն, ինչ-որ B բազմություն և $f : X \to B$ արտապատկերում: Ի՞նչ տոպոլոգիա վերցնենք B-ի վրա, որպեսզի f-ը լինի անընդհատ արտապատկերում: Կարելի է օրինակ B-ն օժտել անտիդիսկրետ տոպոլոգիայով, և իհարկե f-ը կլինի անընդհատ: Այս դեպքում նույնպես առաջանում է խնդիր՝ գտնել B-ի համար այն ամենաուժեղ տոպոլոգիան, որի դեպքում f-ը կլինի անընդհատ: Պարզ է, որ այդ տոպոլոգիան իր մեջ պարունակելու է B-ի այն բոլոր V ենթաբազմությունները, որոնց նախակերպարները բաց ենթաբազմություններ են X-ում: Դարձյալ վերը բերված երկու նույնացումներից հետևում է, որ այդքանը ոչ միայն անհրաժեշտ է, այլ նաև բավարար է: Այսինքն B բազմության ենթաբազմությունների $\{V \in B \mid f^{-1}(V) \in \tau\}$ ընտանիքը բավարարում է տոպոլոգիայի բոլոր 1-3 աքսիոմներին:

Ամփոփենք. եթե ունենք $f : X \to Y$ արտապատկերում, որտեղ X-ը տոպոլոգիա-

կան տարածություն է, իսկ Y-ը բազմություն է, ապա Y-ի այն բոլոր V ենթաբազմությունները, որոնց նախակերպարները բաց են X-ում, կազմում են Y-ի տոպոլոգիա: Ընդ որում, դա այն ամենաուժեղ տոպոլոգիան է Y-ի վրա, որի դեպքում f-ը անընդհատ է: Այս տոպոլոգիան կոչվում է **ֆինալ տոպոլոգիա** Y-ի վրա՝ որոշված f արտապատկերումով:

Մասնավոր դեպքում, երբ f-ը սյուրյեկտիվ արտապատկերում է (այսինքն $f(X) = Y$), այդ տոպոլոգիան կոչվում է ***f* արտապատկերումով ծնված ֆակտոր-տոպոլոգիա** Y բազմության վրա, իսկ Y բազմությունը, օժտված այդ ֆակտոր-տոպոլոգիայով, կոչվում է ***X* տարածության ֆակտոր-տարածություն որոշված *f* արտապատկերումով**:

Պարզաբանենք այս անվանումները: Եթե X բազմության վրա ունենք R համարժեքության հարաբերություն (տե՛ս թեմա 2-ում), ապա X/R ֆակտոր-բազմության համար ունենք $P : X \to X/R$ սյուրյեկտիվ արտապատկերում (**կանոնական պրոյեկցիա**), որը $\forall x \in X$ կետի համապատասխանեցնում է նրա $P(x) = [x]$ համարժեքության դասը: Եթե X-ը նաև տոպոլոգիական տարածություն է, ապա վերը նկարագրված եղանակով X/R ֆակտոր-բազմությունը վերածվում է տոպոլոգիական տարածության (ֆակտոր-տարածության)՝ օժտված P արտապատկերումով որոշված ֆակտոր-տոպոլոգիայով:

Մյուս կողմից՝ ամեն մի $f : X \to Y$ սյուրյեկտիվ արտապատկերում որոշում է R համարժեքության հարաբերություն X-ի վրա, ըստ որի $x_1, x_2 \in X$ տարրեր համարվում են համարժեք այն և միայն այն դեպքում, երբ $f(x_1) = f(x_2)$: Դիտարկենք $h : X/R \to Y$ արտապատկերում՝ սահմանելով $h([x]) = f(x)$: Հեշտությամբ ստուգվում է, որ h-ը փոխմիարժեք արտապատկերում է և

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "P"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X/R \arrow[rr, "h"] & & Y \end{tikzcd}$$

դիագրամը կոմուտատիվ է, այսինքն $f = h \circ P$: Համեմատելով X/R և Y բազմությունների վրա P և f արտապատկերումներով որոշված ֆակտոր-տոպոլոգիաները՝ տեսնում ենք, որ h-ը (ինչպես նաև h^{-1}-ը) բաց ենթաբազմությունները արտապատկերում է բաց ենթաբազմությունների: Ուստի h-ը հոմեոմորֆիզմ է: Այն տոպոլոգորեն նույնացնում է X/R և Y տարածությունները, ինչպես նաև P և f արտապատկերումները:

Ամփոփենք. ֆակտոր-տարածություն կարելի է սահմանել երկու համարժեք եղանակով՝ որպես ելակետ վերցնելով կամ

ա) X տոպ. տարածություն, Y բազմություն և որևէ $f : X \to Y$ սյուրյեկտիվ արտապատկերում, կամ էլ

բ) X տոպոլոգիական տարածություն և X բազմության վրա տրված որևէ R համարժեքության հարաբերություն (այսինքն X բազմության որևէ տրոհում):

Օրինակ 1: Վերցնենք $X = [0,1]$ հատվածը $\mathbb{R}$-ի սովորական տոպոլոգիայից մակածված տոպոլոգիայով: Դիտարկենք երեք՝ $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ տարրերից կազմված որևէ $Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ բազմություն և $f : X \to Y$ սյուրյեկտիվ արտապատկերում, սահմանելով $f(0) = \alpha,\ f(1) = \beta$ և $f(x) = \gamma,\ \forall\, x \in (0,1)$: Ըստ ֆակտոր-տոպոլոգիայի սահմանման՝ Y-ում բաց են համարվում նրա այն և միայն այն ենթաբազմությունները, որոնց նախակերպարները բաց են $[0,1]$-ում: Դիտարկելով Y-ի բոլոր $2^3 = 8$ ենթաբազմությունները և դրանց նախակերպարները՝ ստանում ենք.

$$f^{-1}\varnothing = \varnothing,\ \ f^{-1}\{\alpha\} = \{0\},\ \ f^{-1}\{\beta\} = \{1\},\ \ f^{-1}\{\gamma\} = (0,1),$$
$$f^{-1}\{\alpha,\beta\} = \{0;1\},\ \ f^{-1}\{\alpha,\gamma\} = [0,1),\ \ f^{-1}\{\gamma,\beta\} = (0,1],\ \ f^{-1}\{\alpha,\beta,\gamma\} = [0,1]:$$

Այս ութ ենթաբազմություններից միայն հինգն են բավարարում վերոհիշյալ պայմանին: Ուստի X-ի ֆակտոր-տարածությունը երեք տարրից կազմված $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ բազմություն է՝ օժտված $\tau = \{\varnothing, \{\gamma\}, \{\alpha,\gamma\}, \{\beta,\gamma\}, \{\alpha,\beta,\gamma\}\}$ ֆակտոր-տոպոլոգիայով:

Այժմ այս նույն օրինակը քննարկենք մյուս՝ երկրորդ եղակեպային մոտեցումով. սահմանենք $\sim$ երկտեղ հարաբերություն $X = [0,1]$ հատվածի կետերի համար, ըստ որի համարելու ենք $0 \sim 0,\ 1 \sim 1$, և $x_1 \sim x_2,\ \forall\, x_1, x_2 \in (0,1)$ կետերի դեպքում (այս և ստորև օրինակներում xRy հարաբերությունը գրառելու ենք $x \sim y$ տեսքով):

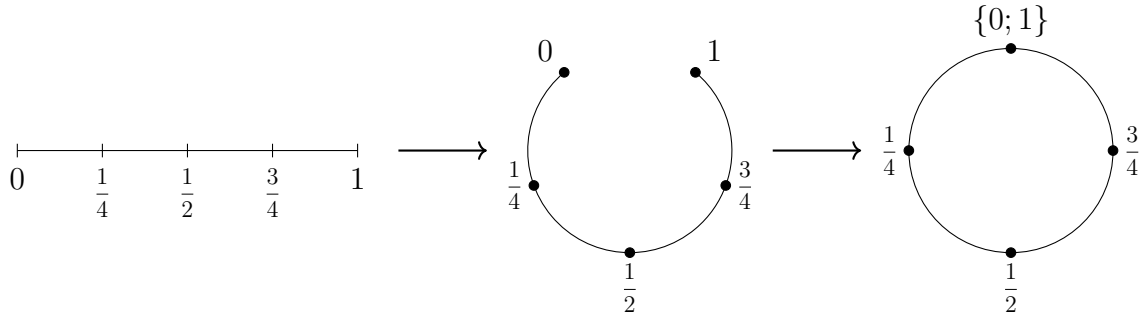
Սա համարժեքության հարաբերություն է, ուստի այն որոշում է $[0,1]$ հատվածի ֆակտոր-բազմություն, կազմված համարժեքության երեք դասերից՝ $[0]$, $[1]$, $\left[\frac{1}{2}\right]$ (այս վերջին համարժեքության դասը կարող է ներկայացվել իր ցանկացած $t \in (0,1)$ ներկայացուցչով՝ $[t]$): Նշանակելով $\alpha = [0],\ \beta = [1],\ \gamma = \left[\frac{1}{2}\right]$, կունենանք ${}^{[0,1]}\!/_{\sim} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ նույնացում և կանոնական $P : [0,1] \to \{\alpha, \beta, \gamma\}$ պրոյեկցիա՝ $P(x) = [x]$, $x \in [0,1]$:

Ինչ վերաբերում է $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ ֆակտոր-բազմության ֆակտոր-տոպոլոգիային, ապա այն որոշվում է ինչպես նախորդ դեպքում և բերում է նույն արդյունքին: Նկատենք, որ այս դեպքում f արտապատկերման դերը կատարում է P պրոյեկցիան:

Դիտողություն: ${}^{X}\!/_{R}$ ֆակտոր-տարածությունը կարող է չժառանգել X տարածության որոշ տոպոլոգիական հատկություններ: Քիչ առաջ դիտարկված օրինակում $[0,1]$-ը հաուսդորֆյան տարածություն է, մինչդեռ նրա ${}^{[0,1]}\!/_{\sim}$ ֆակտոր-տարածությունը հաուսդորֆյան չէ (հիմնավորե՛ք):

Օրինակ 2: Նորից դիտարկենք $X = [0,1]$ հատվածը $\mathbb{R}$-ի սովորական տոպոլոգիայից մակածված տոպոլոգիայով և սահմանենք համարժեքության մեկ ուրիշ հարաբերություն $[0,1]$-ի վրա՝ համարելով $x \sim x,\ \forall\, x \in [0,1]$ կետի դեպքում, և բացի այդ $0 \sim 1$: Այս օրինակում համարժեքության դասերն անթիվ են. դրանք $(0,1)$ ինտերվալի միկետանոց $\{x\}$ ենթաբազմություններն են և $[0,1]$-ի երկկետանոց $\{0,1\}$ ենթաբազմությունը: Ստացված ${}^{[0,1]}\!/_{\sim}$ ֆակտոր-բազմությունը կարելի է նույնացնել, օրինակ, 1 միավոր երկարությամբ շրջանագծի կետերի բազմության հետ (տե՛ս օրինակ 9-ը թեմա 2-ում):

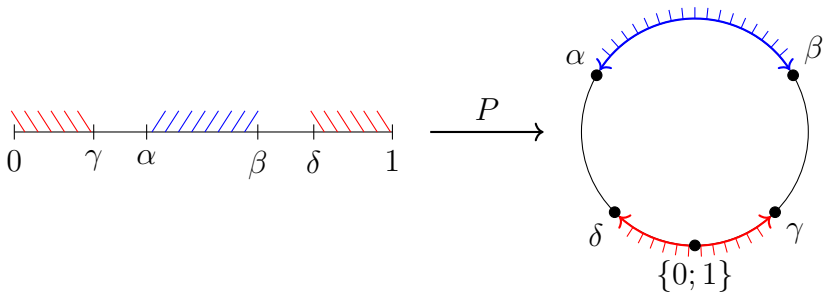
Անցումը $[0,1]$-ից շրջանագծի կարելի է պատկերացնել հետևյալ գծագրի օգնությամբ. մենք պարզապես ծռելով նույնացնում (սոսնձում) ենք $[0,1]$ հատվածի 0 և 1 ծայրակետերը՝ հատվածին տալով, օրինակ, շրջանագծի տեսք:



Հասկանալի է, որ այս պահին շրջանագիծը մենք դիտարկեցինք որպես $[0,1]$ հատվածի ֆակտոր-բազմության մի մոդել: Այժմ, ֆակտոր-տոպոլոգիայի միջոցով կհիմնավորենք, որ մոդելի այս ընտրությունը պատահականություն չէ, և որոշակի իմաստով համապատասխանում է իրականությանը:

Այդ նպատակով համեմատենք հարթությունից շրջանագծի վրա մակածված տոպոլոգիան ֆակտոր-տոպոլոգիայի հետ:

Նկատենք, որ շրջանագծի ամեն մի անեզր $\alpha\beta$ աղեղ, որը չի պարունակում ֆակտոր-բազմության $\{0;1\}$ կետը (համարժեքության դասը), հանդիսանում է բաց ենթաբազմություն (պատկանում է ֆակտոր-տոպոլոգիային), քանի որ նրա նախակերպարը P պրոյեկցիայի դեպքում (α,β), $0<\alpha<\beta<1$ տեսքի ինտերվալ է $[0,1]$ հատվածում: Իսկ եթե շրջանագծի որևէ $\delta\gamma$ անեզր աղեղ պարունակում է $\{0;1\}$ կետը, ապա նրա $P^{-1}(\delta\gamma)$ նախակերպարը $[0,\gamma)\cup(\delta,1]$ միավորումն է, որը բաց ենթաբազմություն է $[0,1]$-ում: Ուստի $\delta\gamma$ աղեղը նույնպես բաց բազմություն է շրջանագծի ֆակտոր-տոպոլոգիայում:



Արդյունքում շրջանագծի (որպես ֆակտոր-բազմության մոդելի) ֆակտոր-տոպոլոգիան կազմված է նրա բոլոր անեզր աղեղներից և դրանց միավորումներից, և ակնհայտորեն համընկնում է $\mathbb{R}^2$ հարթության սովորական տոպոլոգիայից շրջանագծի վրա մակածված տոպոլոգիայի հետ: Հետևաբար $[0,1]$ հատվածի տվյալ ֆակտոր-տարածությունը հոմեոմորֆ է շրջանագծի:

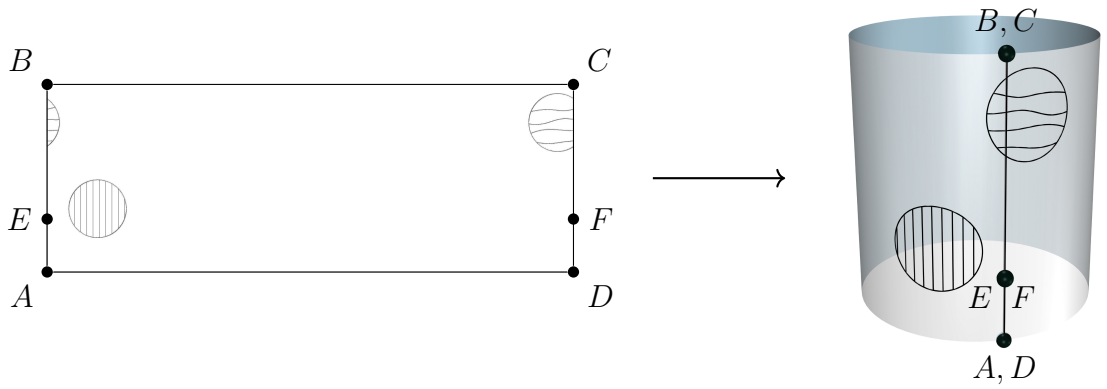
Դիտողություն: Ընթերցողի մոտ կարող է հարց առաջանալ. արդյո՞ք պարտադիր էր օրինակ 2-ում որպես ֆակտոր-բազմություն վերցնել 1 միավոր երկարությամբ շրջանագիծը: Այս մասին խոսվել է թեմա 2-ում. ֆակտոր-բազմության մոդելի ընտրության հարցում մենք ունենք ազատություն: Կարելի է շրջանագծի փոխարեն վերցնել ցանկացած էլիպս կամ բազմանկյուն կամ օվալ (տե՛ս 11.6 խնդիրը նախորդ թեմայում):

Այս բոլոր մոդելները՝ հարթությունից մակածված տոպոլոգիայով, միմյանց հոմեոմորֆ տոպոլոգիական տարածություններ են և կարող են դիտարկվել որպես $[0,1]/\sim$ ֆակտոր-տարածության տարբեր դրսևորումներ (կրկնօրինակներ):

Օրինակ 2-ի նմանությամբ $X/\sim$ ֆակտոր-տարածության մասին հաճախ ասում են, որ այն ստացվում է X-ից նրա որոշ տարրերի **սոսնձումներով** կամ **նույնացումներով**:

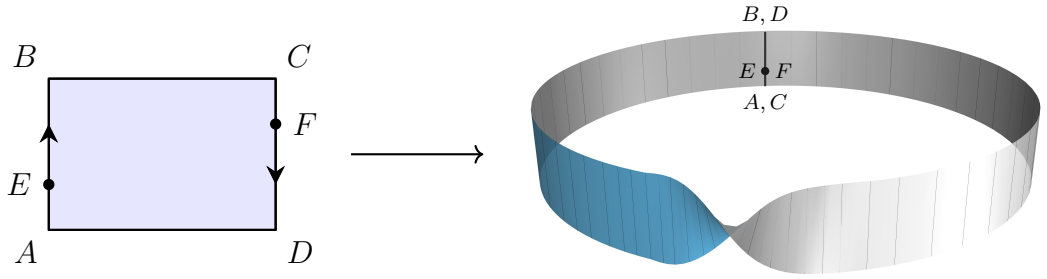
Ստորև բերվող ֆակտոր-տարածությունների օրինակներում մենք կբավարարվենք նշելով միայն իրար հետ նույնացվող (սոսնձվող) տարբեր տարրերը՝ պատկերելով ստացվող տարածությունները մակերևույթների տեսքով $\mathbb{R}^3$-ում:

Օրինակ 3: Վերցնենք թղթի շերտ $ABCD$ ուղղանկյան տեսքով և նույնացնենք AB և DC կողմերի կետերը զույգ առ զույգ, պահպանելով նշված ուղղությունները. A-ն D-ի հետ, B-ն C-ի հետ, E-ն F-ի հետ և այլն:



Արդյունքում ստանում ենք գլան: Նրա եզրը կազմված է երկու շրջանագծերից: Որպես վարժանք ընթերցողին առաջարկում ենք. $ABCD$ ուղղանկյան կետերի տվյալ նույնացումները ներկայացնել որպես համարժեքության հարաբերության դասեր: Ընթերցողին առաջարկում ենք նաև ցույց տալ, որ գլանի ֆակտոր-տոպոլոգիան համընկնում է $\mathbb{R}^3$-ից նրա վրա մակածված տոպոլոգիայի հետ:

Օրինակ 4: Նորից վերցնենք $ABCD$ ուղղանկյունը, բայց այս անգամ նույնացնենք AB և CD ուղղորդված հատվածների կետերը՝ պահպանելով դրանց ուղղությունները. A-ն C-ի հետ, B-ն D-ի հետ, E-ն F-ի հետ և այլն:



Ստացված ֆակտոր-տարածությունը կոչվում է **Մյոբիուսի թերթ**: Այն կարող է պատկերվել որպես $\mathbb{R}^3$-ում ներդրված մակերևույթ: Հեշտ է տեսնել, որ Մյոբիուսի թերթի ֆակտոր-տոպոլոգիան համընկնում է $\mathbb{R}^3$-ից նրա վրա մակածված տոպոլոգիայի հետ:

Մյոբիուսի թերթի մասին ասում են, որ այն միակողմանի մակերևույթ է $\mathbb{R}^3$-ում:

Պարզաբանենք՝ ինչ է նշանակում **միակողմանի մակերևույթ** $\mathbb{R}^3$-ում: Սովորաբար դա ներկայացնում են այսպես. գլանը կամ սֆերան կարելի է ներկել երկու գույնով՝ դրսից մի գույնով (օրինակ՝ կարմիր), իսկ ներսից այլ գույնով (օրինակ՝ կապույտ): Մինչդեռ Մյոբիուսի թերթի դեպքում սկսելով այն ներկել ինչ-որ տեղից, ասենք կանաչ գույնով, անընդհատ շարժվելով մակերևույթով, կպարզվի, որ մակերևույթը թե՛ «ներսից» և թե՛ «դրսից» ներկվել է մի՝ կանաչ գույնով: Այսինքն՝ այս մակերևույթի համար իմաստ չունեն ներս, դուրս հասկացությունները, ուստի այն ունի մի երես (չնայած, որ յուրաքանչյուր կետի բավականաչափ փոքր շրջակայք ունի երկու երես, որոնք կարելի է ներկել տարբեր գույներով):

Սկզբունքորեն սա ընդունելի է, եթե մենք համարում ենք, որ մակերևույթն ունի **հաստություն**: Մինչդեռ մաթեմատիկայում մակերևույթները չունեն հաստություն, և անիմաստ է երկու երես հասկացությունը՝ վերը նկարագրված հիմքով:

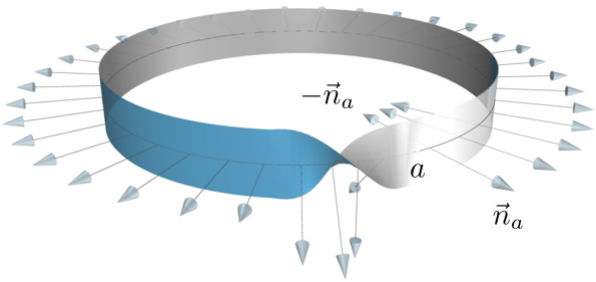
Մյուս կողմից՝ եթե պատկերացնենք, որ դիտորդը կանգնած է մակերևույթի վրա, ապա նա անընդհատ տեղաշարժվելով կարող է հայտնվել մակերևույթի նկատմամբ տարածության կամ մի, կամ մյուս կողմում: Այս հանգամանքը թույլ է տալիս ներմուծել երկկողմանի, միակողմանի մակերևույթ հասկացությունները:

Դիցուք ողորկ մակերևույթի որևէ a կետում ընտրված է մակերևույթի երկու նորմալ միավոր վեկտորներից մեկը՝ $\vec{n}_a$: Դիտարկենք մակերևույթի վրա a կետով անցնող որևէ օվալ և շարժվելով a կետից օվալի երկայնքով՝ անընդհատ տեղափոխենք $\vec{n}_a$ վեկտորն այնպես, որ այն շարունակ մնա ուղղահայաց մակերևույթին: Ապա a կետ վերադառնալիս հնարավոր է երկու դեպք՝ ա) նորմալ վեկտորը հայտնվում է նախկին դիրքում, բ) նորմալ վեկտորը փոխել է իր ուղղությունը (այսինքն համընկել է $-\vec{n}_a$ վեկտորի հետ): Եթե տեղի ունի ա)-ն շրջանցի բոլոր հնարավոր օվալների դեպքում, ապա ասում են, որ մակերևույթը **երկկողմանի մակե-**

ռևույթ է, իսկ եթե մակերևույթի վրա գոյություն ունի գոնե մի օվալ, որ տեղի ունի բ)-ն, ապա մակերևույթը կոչվում է **միակողմանի մակերևույթ**:

Օրինակ՝ $OXYZ$ կոորդինատային եռաչափ տարածությունում երկկողմանի մակերևույթներ են $Ax+By+Cz+D=0$ հարթությունները, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ էլիպսոիդները, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1$ հիպերբոլոիդները, $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ պարաբոլոիդները, $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$ և $y^2=2px$ գլանային մակերևույթները:

Մյոբիուսի թերթի դեպքում հետևյալ գծագիրը ցույց է տալիս, որ միջին գծի երկայնքով մի պտույտ կատարելիս մակերևույթի նորմալը փոխում է իր ուղղությունը, ուստի Մյոբիուսի թերթը միակողմանի մակերևույթ է $\mathbb{R}^3$-ում:

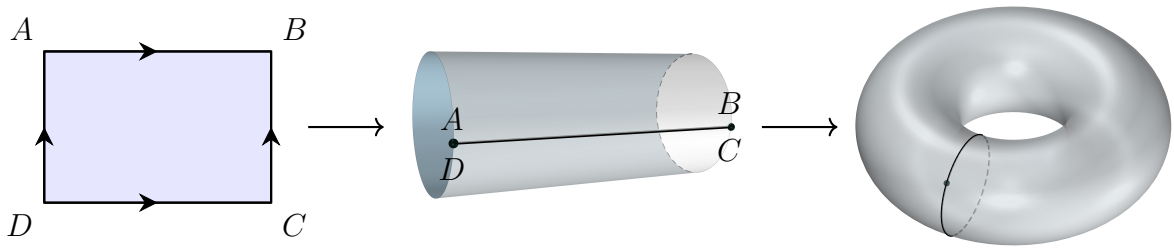


Նկատենք, որ եթե որևէ մակերևույթ իր մեջ պարունակում է Մյոբիուսի թերթ, ապա այն միակողմանի մակերևույթ է $\mathbb{R}^3$-ում:

Նշենք, որ մակերևույթի միակողմանիությունը կամ երկկողմանիությունը չի հանդիսանում տվյալ մակերևույթի ներքին (սեփական) հատկություն և ի հայտ է գալիս, երբ մակերևույթը ներդրվում է $\mathbb{R}^3$-ում: Ուստի դրանք չեն հանդիսանում մակերևույթի տոպոլոգիական հատկություններ:

Մի քանի կարևոր, առանց եզր մակերևույթներ ստացվում են ուղղանկյան կամ քառակուսու կողմերի զույգ առ զույգ նույնացումներով:

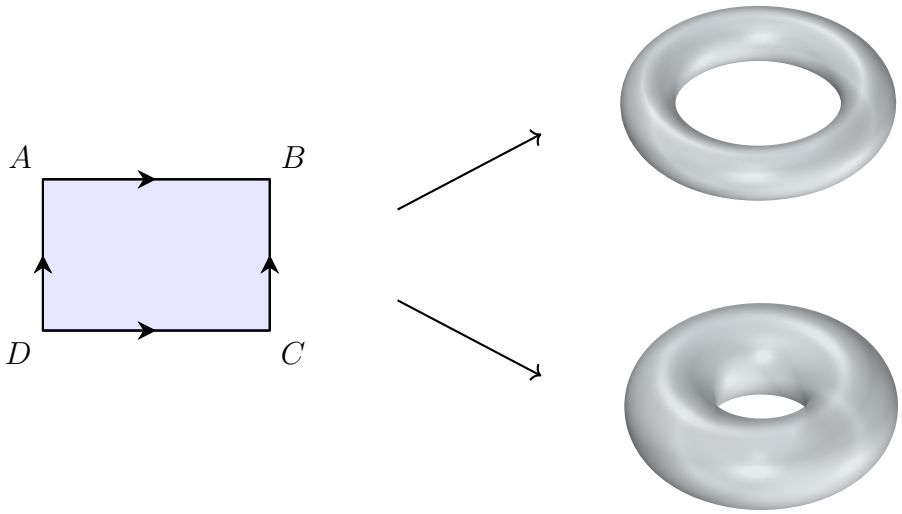
Օրինակ 5: Նախ նույնացնելով $ABCD$ քառակուսու AB կողմը DC կողմի հետ և այնուհետև նույնացնելով ստացված գլանի վերին և ստորին հիմքերը՝ պահպանելով նշված ուղղությունները, ստացվում է տոր:



Փորձեք ցույց տալ, որ այս դեպքում ևս տորի ֆակտոր-տոպոլոգիան համընկնում է նրա վրա $\mathbb{R}^3$-ից մակածված տոպոլոգիայի հետ:

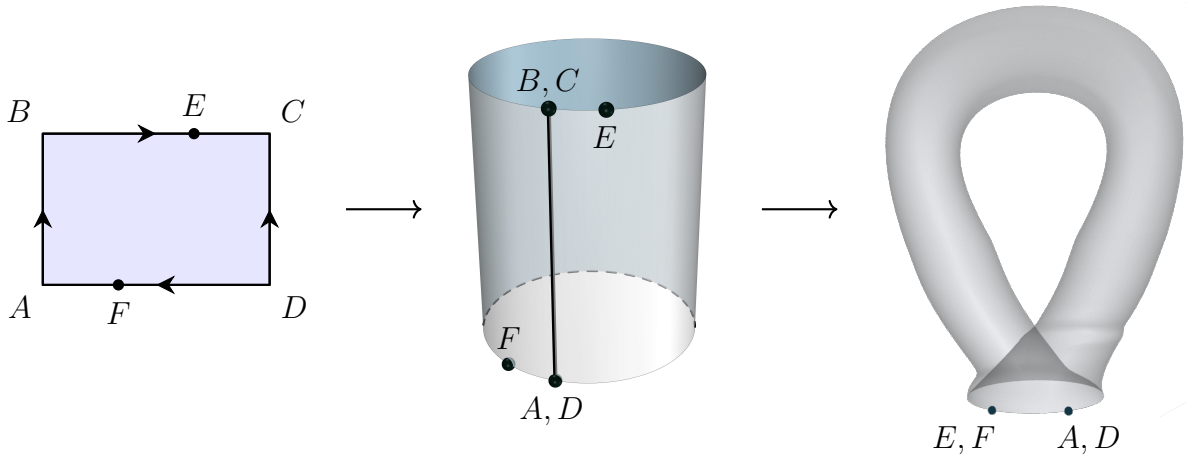
Նկատենք, որ տորը որպես ֆակտոր-տարածություն կարող է ստացվել նաև $\mathbb{R}^2$ հարթությունից (տե՛ս օրինակ 9-ը թեմա 2-ում):

Դիտողություն: Տոր կարելի է ստանալ $ABCD$ ուղղանկյունուց՝ փոխելով կողմերի նույնացումների հաջորդականությունը. նախ սոսնձելով DA և CB կողմերը և ապա սոսնձելով AB և DC կողմերը: Արդյունքում կստանանք տորի մեկ ուրիշ իրացում $\mathbb{R}^3$-ում:



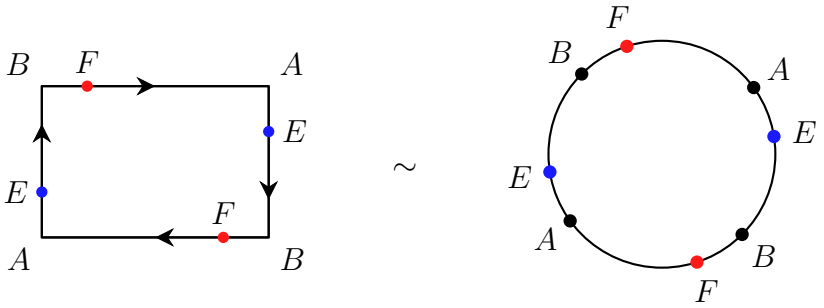
Ընթերցողին առաջարկում ենք կառուցել կանոնական հոմեոմորֆիզմ դրանց միջև այնպես, որ մի իրացման զուգահեռականներն ու միջօրեականները փոխակերպվեն համապատասխանաբար մյուս իրացման միջօրեականների ու զուգահեռականների:

Օրինակ 6: Նորից դիտարկենք $ABCD$ ուղղանկյուն, բայց կողմերի այլ կողմնորոշումներով:

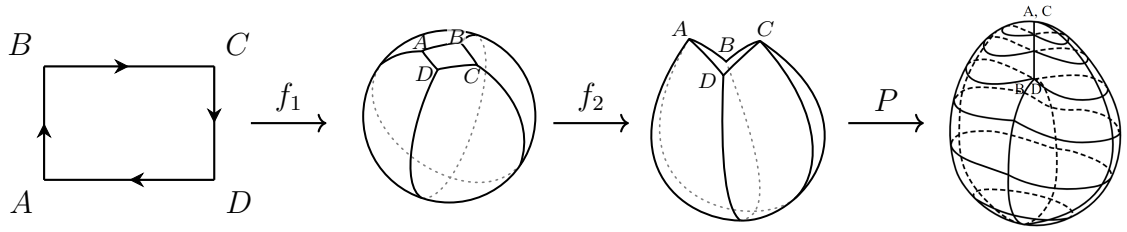


Նույնացնելով AB-ն DC-ի հետ, այնուհետև նույնացնելով ստացված գլանի վերին և ստորին հիմքերը ըստ նշված ուղղությունների՝ ստացվում է անեզր մակերևույթ, որը կոչվում է **Կլեյնի շիշ**: Այն իր մեջ պարունակում է Մյոբիուսի թերթ (հիմնավորե՛ք) և այդ պատճառով նույնպես միակողմանի մակերևույթ է: Կլեյնի շիշը հնարավոր չէ առանց ինքնահատումների ներդնել եռաչափ տարածության մեջ: Առանց ինքնահատումների այն իրացվում է քառաչափ տարածությունում:

Օրինակ 7: Գոյություն ունի ուղղանկյան հանդիպակաց կողմերի զույգ առ զույգ նույնացման ևս մի եղանակ, ըստ կողմերի վրա նշված ուղղությունների (տե՛ս գծագիրը, որտեղ նույնացվող կետերը նշանակված են նույն տառով):



Ստացվող անեզր մակերևույթը կոչվում է **պրոյեկտիվ հարթություն**: Այն համարժեք ձևով կարող է ստացվել շրջանից, եթե նույնացնենք շրջանի եզրագծի (շրջանագծի) յուրաքանչյուր կետ տրամագծորեն իրեն հակադիր կետի հետ: Այս մակերևույթը նույնպես իր մեջ պարունակում է Մյոբիուսի թերթ (հիմնավորե՛ք) և նույնպես միակողմանի մակերևույթ է: Այն հնարավոր չէ առանց ինքնահատումների իրացնել $\mathbb{R}^3$-ում, բայց հնարավոր է դա անել $\mathbb{R}^4$-ում (այդ մասին տե՛ս Д. Гильберт, С. Кон–Фоссен, "Наглядная геометрия" գրքում): Ցույց տանք, թե ինչպես է հնարավոր պրոյեկտիվ հարթությունը պատկերել $\mathbb{R}^3$-ում (ինքնահատումով):



Այստեղ f_1-ը և f_2-ը հոմեոմորֆիզմներ են, իսկ P-ն նույնացնում է («սոսնձում» է) DA-ն BC-ի հետ և AB-ն CD-ի հետ:

Դիտողություն: Պրոյեկտիվ հարթության հետ մենք արդեն ծանոթացել ենք թեմա 7-ում, որտեղ այն սահմանվեց որպես եռաչափ տարածության սևեռված O կետով անցնող բոլոր ուղիղների բազմություն՝ օժտված անկյունային մետրիկային տոպոլոգիայով: Ըստ այդ սահմանման՝ որևէ l_0 ուղղի ε-շրջակայք կազմում են այն բոլոր l ուղիղները, որոնց կազմած φ սուր անկյունները l_0-ի հետ բավարարում են $\varphi < \varepsilon$ պայմանին, որտեղ $\varepsilon \in [0°, 90°]$:

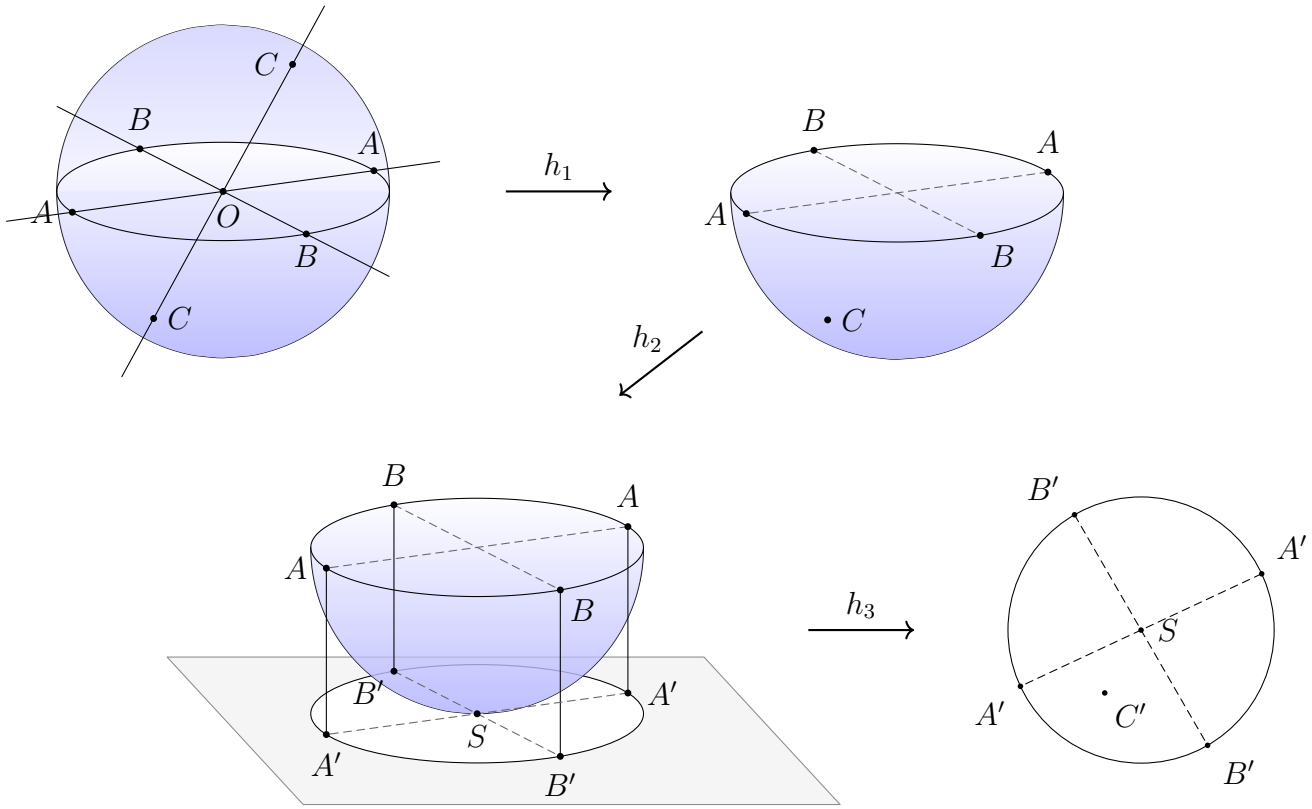
Ցույց տանք, որ պրոյեկտիվ հարթության այս երկու (հին և նոր) սահմանումները համարժեք են միմյանց (այսինքն բերում են միևնույն արդյունքին)՝ կառուցելով հոմեոմորֆիզմներ պրոյեկտիվ հարթության տարբեր մոդելների միջև մի քանի քայլով:

1. Սֆերայի O կենտրոնով անցնող յուրաքանչյուր ուղիղ հատում է սֆերան տրամագծորեն հակադիր երկու կետերում: Ուստի պրոյեկտիվ հարթությունը (դիտարկված ըստ հին սահմանման) հոմեոմորֆ է սֆերայի ֆակտոր-տարածությանը, որն ստացվում է սֆերայի տրոհումից որպես տրամագծորեն հակադիր բոլոր կետազույգերի բազմություն:

2. Հեռացնելով վերին (հյուսիսային) բաց կիսասֆերան կարող ենք պրոյեկտիվ հարթությունը ներկայացնել որպես ստորին (հարավային) փակ կիսասֆերայի ֆակտոր-տարածություն՝ զույգ առ զույգ նույնացնելով հասարակածային շրջանագծի տրամագծորեն հակադիր կետերը:

3. Պրոյեկտելով հարավային կիսասֆերան S բևեռում նրան շոշափող հարթության վրա, ստանում ենք. պրոյեկտիվ հարթությունը կարող է ստացվել նաև փակ շրջանից՝ զույգ առ զույգ սոսնձելով (նույնացնելով) նրա եզրային շրջանագծի տրամագծորեն հակադիր կետերը:

Ստորև գծագրում պատկերված են այդ անցումները h_1, h_2, h_3 հոմեոմորֆիզմների տեսքերով:



Ավարտելով օրինակները՝ կանգ առնենք ֆակտոր-տարածությունների որոշ հատկությունների վրա: Դրանցից առաջինը $P : X \to {}^{X}\!/_{R}$ կանոնական պրոյեկցիայի այսպես կոչված **ունիվերսալության հատկությունն** է:

Թեորեմ 1: Դիցուք Y-ը X տարածության ֆակտոր-տարածություն է՝ $Y = {}^{X}\!/_{R}$ ըստ համարժեքության ինչ-որ R հարաբերության, իսկ $P : X \to Y$ արտապատկերումը կանոնական պրոյեկցիան է: Ապա որևէ $g : Y \to Z$ արտապատկերում անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ անընդհատ է $g \circ P : X \to Z$ համադրությը:

Ապացուցում: Եթե g-ն անընդհատ է, ապա $g \circ P$-ն անընդհատ է որպես անընդհատ արտապատկերումների համադրույթ: Այժմ հակառակը. դիցուք $g \circ P$-ն անընդհատ է: Ցույց տանք, որ g-ն անընդհատ է (նկատենք, որ g-ի անընդհատությունը չի կարող դուրս բերվել թեմա 9-ի թեորեմ 9-ից, քանի որ ընդհանուր դեպքում $P : X \to {}^{X}\!/_{R}$ կանոնական պրոյեկցիան չի հանդիսանում բաց կամ փակ արտապատկերում): Վերցնենք որևէ $U \in Z$ բաց ենթաբազմություն և ցույց տանք, որ $g^{-1}(U)$-ն բաց է Y-ում: Ունենք՝ $(g \circ P)^{-1}(U) = P^{-1}(g^{-1}(U))$, որը բաց է X-ում ըստ պայմանի: Ուստի $g^{-1}(U)$-ն բաց է Y-ում ըստ ֆակտոր-տոպոլոգիայի սահմանման: ■

Դիցուք X-ը և Y-ը որևէ բազմություններ են, իսկ R-ը և S-ը համարժեքության հարաբերություններ են համապատասխանաբար X-ի և Y-ի վրա: Դիցուք $f : X \to Y$ արտապատկերումն այնպիսին է, որ X-ում տարրերի միջև $x_1 R x_2$ հարաբերություն տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի տարրերի $f(x_1) S f(x_2)$ հարաբերություն Y-ում:

Այս պայմաններում սահմանվում է ֆակտոր-բազմությունների ${}^{X}\!/_{R} \to {}^{Y}\!/_{S}$ արտապատկերում համարժեքության դասերի $[x] \mapsto [f(x)]$ համադրումով (այստեղ պարզության համար համարժեքության դասերը X-ում և Y-ում նշանակված են միևնույն $[\ \ ]$ սիմվոլով): Այդ արտապատկերումը կոչվում է f արտապատկերման **ֆակտոր-արտապատկերում** և նշանակվում է $f_{(R,S)}$: Այսպիսով ըստ սահմանման՝ $f_{(R,S)}([x]) = [f(x)]$:

Թեորեմ 2: Ունենք X, Y տոպոլոգիական տարածություններ և $f : X \to Y$ արտապատկերում: Եթե f-ը անընդհատ է, ապա նրա ցանկացած $f_{(R,S)}$ ֆակտոր-արտապատկերում անընդհատ է: Եթե f-ը հոմեոմորֆիզմ է, ապա $f_{(R,S)}$-ը նույնպես հոմեոմորֆիզմ է:

Ապացուցում: Դիտարկենք $P_X : X \to {}^{X}\!/_{R}$, $P_X(x) = [x]$ և $P_Y : Y \to {}^{Y}\!/_{S}$, $P_Y(y) = [y]$ կանոնական պրոյեկցիաները: Ցույց տանք, որ

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "P_X"'] & Y \arrow[d, "P_Y"] \\ {}^{X}\!/_{R} \arrow[r, "f_{(R,S)}"] & {}^{Y}\!/_{S} \end{tikzcd}$$

դիագրամը կոմուտատիվ է՝ $P_Y \circ f = f_{(R,S)} \circ P_X$:

Իրոք, մի կողմից $\big(P_Y \circ f\big)(x) = P_Y\big(f(x)\big) = [f(x)]$, իսկ մյուս կողմից՝

$$\big(f_{(R,S)} \circ P_X\big)(x) = f_{(R,S)}\big(P_X(x)\big) = f_{(R,S)}\big([x]\big) = [f(x)]:$$

Եթե f-ը անընդհատ է, ապա $P_Y \circ f$-ը անընդհատ է որպես անընդհատ արտապատկերումների համադրույթ, ուստի անընդհատ է $f_{(R,S)} \circ P_X$-ը: Այժմ $f_{(R,S)}$ արտապատկերման անընդհատությունը հետևում է P_X կանոնական պրոյեկցիայի ունիվերսալության հատկությունից ըստ թեորեմ 1-ի:

Ապացուցենք թեորեմի երկրորդ պնդումը: Դիցուք f-ը հոմեոմորֆիզմ է. ցույց տանք, որ $f_{(R,S)}$-ը հակադարձելի արտապատկերում է: Եթե $f_{(R,S)}([x_1]) = f_{(R,S)}([x_2])$, ապա $[f(x_1)] = [f(x_2)]$, ուստի տեղի ունի $f(x_1)Sf(x_2)$ հարաբերությունը: Սրանից հետևում է, որ տեղի ունի x_1Rx_2 հարաբերությունը, ուրեմն $[x_1] = [x_2]$: Այսպիսով $f_{(R,S)}$-ը ինյեկտիվ արտապատկերում է, իսկ նրա սյուրյեկտիվությունը հետևում է f-ի սյուրյեկտիվությունից: Հետևաբար գոյություն ունի ${f_{(R,S)}}^{-1}$ հակադարձ արտապատկերում: Այդ արտապատկերման անընդհատությունը հետևում է $P_X \circ f^{-1} = {f_{(R,S)}}^{-1} \circ P_Y$ հավասարությունից՝ շնորհիվ P_Y կանոնական պրոյեկցիայի ունիվերսալության հատկության: ■

Դիտարկենք թեորեմ 2-ի մի կիրառության օրինակի տեսքով: Որպես X վերցնենք դրական թվերի $(0, +\infty)$ բազմությունը $\mathbb{R}$ թվային ուղղի սովորական տոպոլոգիայից մակածված տոպոլոգիայով, որպես Y վերցնենք $\mathbb{R}$-ը, իսկ որպես $f : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ հոմեոմորֆիզմ՝ $f(x) = \lg x$ ֆունկցիան: Այժմ սահմանենք R և S համարժեքության հարաբերություններ X-ի և Y-ի վրա:

Կհամարենք, որ $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ տարրերը բավարարում են R հարաբերությանը, եթե x_1, x_2 թվերից որևէ մեկը ստացվում է մյուսի բազմապատկումով որևէ 10^n, $n \geq 0$ թվով: Ինչպես գիտենք (տե՛ս թեմա 2-ում), ցանկացած իրական թիվ միակ ձևով ներկայացվում է անվերջ դասնորդական կոտորակի տեսքով: Ուստի «տեղի ունի x_1Rx_2 հարաբերություն» նույնն է ինչ՝ կամ $r_1 = r_2$, կամ այդ թվերից մեծը ստացվում է փոքրից՝ կոտորակում ստորակետը n նիշ դեպի աջ տեղափոխումով (օրինակ՝ այդպիսիք են 0,31051...; 3,1051...; 31,051...; և այլն թվերը):

Կհամարենք, որ տեղի ունի r_1Sr_2, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ հարաբերություն, եթե $(r_1 - r_2)$-ը ամբողջ թիվ է: Այս համարժեքության հարաբերությունը քննարկվել է թեմա 2-ում (տե՛ս օրինակ 9-ը): Համեմատելով այն օրինակ 2-ի հետ՝ արդյունքում ստանում ենք, որ $\mathbb{R}/S$ ֆակտոր-տարածությունը հոմեոմորֆ է շրջանագծի:

Եթե $x_1 = 10^n \cdot x_2$, ապա $\lg x_1 - \lg x_2 = n$: Ուստի x_1Rx_2 տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի $f(x_1)Sf(x_2)$: Այժմ թեորեմ 2-ից ստանում ենք, որ $f_{(R,S)} : X/R \to Y/S$ ֆակտոր-արտապատկերումը ֆակտոր-տարածությունների հոմեոմորֆիզմ է: Այստեղից որպես հետևանք ստանում ենք, որ X/R ֆակտոր-տարածությունը նույնպես հոմեոմորֆ է շրջանագծի:

Իհարկե, ստացված արդյունքը մեծ չէ, և դրան կարելի էր հասնել նաև անմիջա-

կանորեն: Բայց մենք գերադասեցինք այս ուղին ցուցադրելու համար թեորեմ 2-ը որպես մեթոդ, որը կարող է լինել օգտակար այլ, ավելի բարդ իրավիճակներում:

Նախորդ թեմայում խոսք գնաց տոպոլոգիական տարածությունների այն հատկությունների մասին, որոնք ժառանգաբար անցնում են նրանց ենթատարածություններին:

Նման հարցադրում տեղի ունի նաև տարածությունների ֆակտորիզացիայի դեպքում: Ասում են, որ տոպոլոգիական տարածություններին առնչվող որևէ P հատկություն ժառանգական է տարածությունների ֆակտորիզացիայի դեպքում, եթե ամեն անգամ, երբ որևէ X տարածություն օժտված է P հատկությամբ, նրա ցանկացած X/R ֆակտոր-տարածություն նույնպես օժտված է P հատկությամբ:

Օրինակ 1-ում մենք տեսանք, որ անջատելիության T_2 աքսիոմը չի հանդիսանում ժառանգական հատկություն ֆակտորիզացիայի դեպքում: Այժմ բերենք ժառանգական հատկության մի օրինակ:

Թեորեմ 3: Սեպարաբել տարածության ցանկացած ֆակտոր-տարածություն սեպարաբել տարածություն է:

Ապացուցում: Դիցուք X-ը սեպարաբել տարածություն է. դիտարկենք նրա որևէ X/R ֆակտոր-տարածություն և $P : X \to X/R$ կանոնական պրոյեկցիան: Ինչպես գիտենք, P-ն անընդհատ և սյուրյեկտիվ արտապատկերում է:

Ըստ պայմանի՝ X-ում գոյություն ունի ամենուրեք խիտ հաշվելի $A \subset X$ ենթաբազմություն՝ $\overline{A} = X$: Ըստ թեմա 9-ում թեորեմ 5-ի՝ $P(\overline{A}) \subset \overline{P(A)}$: Քանի որ $P(\overline{A}) = P(X) = X/R$, ուստի $\overline{P(A)} = X/R$: Այսպիսով $P(A)$-ն ամենուրեք խիտ հաշվելի ենթաբազմություն է X/R-ում, ուրեմն X/R ֆակտոր-տարածությունը սեպարաբել է: ■

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 12-ի վերաբերյալ

1.1. Ապացուցեք. ($\mathbb{R}$, սովոր.) թվային ուղղի $(-\infty, 0] \cup (0, +\infty)$ փրոհումից ստացվող ֆակտոր-տարածությունը հոմեոմորֆ է կապակցված կետազույգ տարածությանը (սահմանումը տե՛ս թեմա 4-ում):

1.2. Դիտարկենք ($\mathbb{R}$, սովոր.) տարածության կետերի միջև R երկտեղ հարաբերություն, ըստ որի $x_1 R x_2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)$-ը ամբողջ թիվ է: Ապացուցեք.

ա) R-ը համարժեքության հարաբերություն է,

բ) $\mathbb{R}/R$ ֆակտոր-տարածությունը հոմեոմորֆ է ($\mathbb{R}$, սովոր.) տարածության շրջանագծի:

Ցուցում. Օգտվեք թեմա 2-ում օրինակ 9-ից և այս թեմայի օրինակ 2-ից:

1.3. Դիտարկենք $\mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթությունը սովորական տոպոլոգիայով և R երկտեղ հարաբերություն նրա կետերի միջև, ըստ որի $(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2$ և $y_1 - y_2$ թվերը ամբողջ են: Ապացուցեք.

ա) R-ը համարժեքության հարաբերություն է,

բ) ${\mathbb{R}^2}/{R}$ ֆակտոր-տարածությունը հոմեոմորֆ է տորի:

Յուցում. Օգտվեք թեմա 2-ում օրինակ 10-ից:

1.4. Ճի՞շտ է արդյոք պնդումը. եթե ունենք տոպոլոգիական տարածությունների $f : X \to Y$ անընդհատ, սյուրյեկտիվ արտապատկերում, ապա Y-ը X-ի ֆակտոր-տարածությունն է որոշված f արտապատկերումով:

Յուցում. Դիտարկեք, օրինակ, $(X, \text{դիսկր.})$, $(Y, \text{անտիդ.})$ տարածությունները, որտեղ $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, և $f : X \to Y$, $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ արտապատկերումը: Ցույց տվեք, որ Y բազմության տվյալ տոպոլոգիան չի համընկնում f արտապատկերումով որոշվող Y-ի ֆակտոր-տոպոլոգիայի հետ:

1.5. Ապացուցեք, որ $\mathbb{RP}^1$ պրոյեկտիվ ուղիղը հոմեոմորֆ է շրջանագծի:

Յուցում. Ներկայացրեք $\mathbb{RP}^1$-ը որպես փակ կիսաշրջանագծի ֆակտոր-տարածություն:

1.6. Ստուգեք. արդյո՞ք բաց (փակ) արտապատկերում է օրինակ 1-ում $P : X \to {X}/{R}$ կանոնական պրոյեկցիան:

1.7. Ճի՞շտ է արդյոք պնդումը. ցանկացած ${X}/{R}$ ֆակտոր-տարածության դեպքում $P : X \to {X}/{R}$ կանոնական պրոյեկցիան բաց արտապատկերում է:

Յուցում. Դիտարկեք օրինակ 2-ում $[0, \frac{1}{2}) \subset [0, 1]$ ենթաբազմության կերպարը կանոնական պրոյեկցիայի դեպքում:

1.8. Ապացուցեք. կամայական ${X}/{R}$ ֆակտոր-տարածության դեպքում $P : X \to {X}/{R}$ կանոնական պրոյեկցիան բաց (փակ) արտապատկերում է այն և միայն այն դեպքում, երբ X-ի ցանկացած U բաց ենթաբազմության դեպքում $P^{-1}\big(P(U)\big)$ ենթաբազմությունը բաց է (փակ է) X-ում:

Մինչև հաջորդ խնդիրներին անցնելը տանք մի սահմանում:

Դիցուք X-ը տոպոլոգիական տարածություն է, իսկ A-ն X-ի որևէ ենթաբազմություն է: Դիտարկենք R համարժեքության հարաբերություն X-ի վրա համարելով՝

ա) տեղի ունի $a_1 R a_2$ հարաբերություն A-ի ցանկացած երկու a_1, a_2 տարրերի դեպքում,

բ) եթե $x_1, x_2 \in X \setminus A$, կամ $x_1 \in A$ և $x_2 \in X \setminus A$, ապա տեղի ունի $x_1 R x_2$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $x_1 = x_2$:

Այսպիսով համարժեքության դասերը X-ի միկեպանոց ենթաբազմություններն են և A-ն:

Այս դեպքում X/R ֆակտոր-տարածության մասին ասում են, որ այն ստացվում է X-ից՝ **սեղմելով մի կետի** A ենթաբազմությունը: Նշանակենք այդ տարածությունը X/A սիմվոլով:

1.9. Դիցուք X-ը $\mathbb{R}^2$ կոորդինատային հարթության $\mathcal{B}^2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ միավոր շրջանն է, իսկ A-ն նրա եզրային $\mathcal{S}^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ միավոր շրջանագիծն է: Ապացուցեք, որ X/A ֆակտոր-տարածությունը հոմեոմորֆ է $\mathcal{S}^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ սֆերային: Պատկերավոր ասած՝ շրջանի եզրը կետի սեղմելիս ստացվում է սֆերա:

Ցուցում. Նախ կառուցեք հոմեոմորֆիզմ $\mathcal{B}^2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ անեզր շրջանի և առանց մի կետ $\mathcal{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ շրջանի միջև:

1.10. Դիցուք X-ը $x^2 + y^2 = 1$ ուղիղ շրջանային գլանն է $\mathbb{R}^3$-ում, իսկ A-ն $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ շրջանագիծն է: Ապացուցեք, որ X/A ֆակտոր-տարածությունը հոմեոմորֆ է $Y = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ կոնական մակերևույթին: Պատկերավոր ասած՝ գլանում մի շրջանագիծ կետի սեղմելիս ստացվում է կոնական մակերևույթ:

Ցուցում. Նախ ցույց տվեք, որ $(x, y, z) \mapsto (xz, yz, z)$ համադրումը որոշում է հոմեոմորֆիզմ $X \setminus A$ և $Y \setminus \{(0, 0, 0)\}$ տարածությունների միջև: